Lösungen für das 12. Übungsblatt

Aufgabe 1. Nach dem Satz von Gauß gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} v \; dV \;=\; \int_{\partial\Omega} v \; dA.$$

Wählt man das Vektorfeld v derart, daß $\operatorname{div} v = 1$ überall gilt, ergibt die linke Seite das Volumen des Gebiets Ω. Zur Berechnung des Kugel- und Zylindervolumens bieten sich

$$v(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ bzw. } v(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

an. Dann erhält man für die Kugel

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} v \; dA &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \Big| \partial_\phi F(\phi,\theta) \;\; \partial_\theta F(\phi,\theta) \;\; v\big(F(\phi,\theta)\big) \Big| \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \begin{vmatrix} -R\sin\phi\cos\theta & -R\cos\phi\sin\theta & R/3\cos\phi\cos\theta \\ R\cos\phi\cos\theta & -R\sin\phi\sin\theta & R/3\sin\phi\cos\theta \\ 0 & R\cos\theta & R/3\sin\theta \end{vmatrix} \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \\
&\qquad \frac{R^3}{3}\cos\theta \left(\sin^2\phi\sin^2\theta + \cos^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos^2\theta\right) \\
&= \frac{R^3}{3}\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \; d\theta \\
&= \frac{R^3}{3}\int_0^{2\pi} 2 \; d\phi \;=\; \frac{4\pi}{3}R^3,
\end{aligned}$$

und für den Zylinder (man beachte, daß zur Berechnung von $\int_{\partial\Omega} v \; dA$ nur das Integral über die Mantelfläche des Zylinders ausgewertet werden muß, da v tangential zu Boden- und Deckfläche ist)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} v \; dA &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dz \Big| \partial_\phi F(\phi,z) \;\; \partial_z F(\phi,z) \;\; v\big(F(\phi,z)\big) \Big| \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dz \begin{vmatrix} -R\sin\phi & 0 & R/2\cos\phi \\ R\cos\phi & 0 & R/2\sin\phi \\ 0 & H & Hz \end{vmatrix} \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dz \; \frac{R^2 H}{2}\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right) \\
&= \frac{R^2 H}{2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 1 \; dz \\
&= \frac{R^2 H}{2}\int_0^{2\pi} 1 \; d\phi \;=\; \pi R^2 H.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix ist $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$. Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$. Zugehörige Eigenvektoren sind z.B. $v_1 = \binom{1}{0}$ und $v_2 = \binom{1}{1}$, so daß

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $x = Sy$ hat man $y = S^{-1}x$ und deshalb

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = S^{-1}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} S\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Man erhält entkoppelte Gleichungen für y_1 und y_2:

$$\dot{y_1} = -y_1, \quad \dot{y_2} = 2y_2$$

mit Lösungen $y_1(t) = c_1 e^{-t}$, $y_2 = c_2 e^{2t}$. Bestimmt man c_1 und c_2 so, daß

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = S^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(0) = S^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$y_1(t) = 2e^{-t}, \quad y_2(t) = e^{2t}$$

und schließlich

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) = S\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} + e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= 1 \\
x_1(t) &= 1 + \int_0^t 1 \; ds \\
&= 1 + t \\
x_2(t) &= 1 + \int_0^t (1+s)^2 \; ds \\
&= 1 + \int_0^t (1 + 2s + s^2) \; ds \\
&= 1 + t + t^2 + t^3/3 \\
x_3(t) &= 1 + \int_0^t (1 + s + s^2 + s^3/3)^2 \; ds \\
&= 1 + \int_0^t (1 + 2s + 3s^2 + \frac{8}{3}s^3 + \frac{5}{3}s^4 + \frac{2}{3}s^5 + \frac{1}{9}s^6) \; ds \\
&= 1 + t + t^2 + t^3 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{1}{3}t^5 + \frac{1}{9}t^6 + \frac{1}{63}t^7
\end{aligned}$$