Lösungen für das 8. Übungsblatt

Aufgabe 1. Die einzelnen partiellen Ableitungen errechnet man wie folgt:

- $V = cT/p \longrightarrow \partial V/\partial T = c/p$
- $T = pV/c \longrightarrow \partial T/\partial p = V/c$
- $p = cT/V \longrightarrow \partial p/\partial V = -cT/V^2$

Zusammenfassend:

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial V} = \frac{c}{p} \cdot \frac{V}{c} \cdot \frac{-cT}{V^2} = -\frac{cT}{pV} = -1.$$

Aufgabe 2. (i) An jedem Punkt $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ berechnet sich mithilfe der üblichen Ableitungsregeln

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = \frac{2x_1 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

Um die partiellen Ableitungen bei $(x_1, x_2) = (0,0)$ auszurechnen, nutzt man die Definition:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} f(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Die Funktion

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2x_1 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & \text{falls } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

ist *nicht* stetig bei $(0,0)$. Betrachtet man z.B. den Limes von $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2)$ für $(x_1, x_2) \to (0,0)$ entlang des Weges mit $x_1 = x_2$, so erhält man

$$\lim_{t \to 0} \frac{2 \cdot t \cdot t^3}{(t^2 + t^2)^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial}{\partial x_1} f(0,0).$$

Mit analoger Argumentation zeigt man, daß auch $\frac{\partial}{\partial x_2} f$ bei $(0,0)$ unstetig ist (betrachte den Limes entlang der x_1-Achse).

(ii) Nach Definition ist die Richtungsableitung entlang $a = (1,1)^T$ gegeben durch

$$D_a f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f\big(h \cdot (1,1)\big) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot h}{h \cdot (h^2 + h^2)} = \frac{1}{2}.$$

(iii) f ist bei $(0,0)$ *nicht* differenzierbar. Wäre nämlich f dort differenzierbar, so müßte gelten:

$$D_a f(0,0) = (a \cdot \nabla) f(0,0) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(0,0) + \frac{\partial}{\partial x_2} f(0,0).$$

Nach (i) ist der Ausdruck rechts null, während sich links nach (ii) der Wert $1/2$ ergibt.

Aufgabe 3.

$$\operatorname{rot} f = \ldots \quad \text{(i)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii)} \begin{pmatrix} -2x_3 \\ 0 \\ \sin x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{(iv)} \begin{pmatrix} x_1 x_3 e^{x_2 x_3} + x_1/x_3^2 \\ \frac{x_3}{x_2^2 + x_3^2} - e^{x_2 x_3} \\ \frac{1}{x_3} - \frac{x_2}{x_2^2 + x_3^2} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} f = \ldots \quad \text{(i) } 3, \quad \text{(ii) } 0, \quad \text{(iii) } e^{x_3}, \quad \text{(iv) } 1/x_1 + x_1 x_2 e^{x_2 x_3}.$$

Zum Beweis der Identität $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\big(\operatorname{rot} f\big) &= \operatorname{div}\begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix} \\
&= \partial_1\partial_2 f_3 - \partial_1\partial_3 f_2 + \partial_2\partial_3 f_1 - \partial_2\partial_1 f_3 + \partial_3\partial_1 f_2 - \partial_3\partial_2 f_1
\end{aligned}$$

Da f zweimal stetig differenzierbar ist, gilt $\partial_1\partial_2 f_3 = \partial_2\partial_1 f_3$ etc. Damit ergibt sich in der Summe oben Null.

Aufgabe 4.

$$\begin{aligned}
H\phi_1(x) &= (1-x^2)e^{-x^2/2} + x^2 e^{-x^2/2} \;=\; 1\cdot e^{-x^2/2} \\
H\phi_2(x) &= (3x-x^3)e^{-x^2/2} + x^3 e^{-x^2/2} \;=\; 3\cdot x e^{-x^2/2} \\
H\phi_3(x) &= (-5+11x^2-2x^4)e^{-x^2/2} + (-x^2+2x^4)e^{-x^2/2} \;=\; 5\cdot(-1+2x^2)e^{-x^2/2}
\end{aligned}$$

Man erhält als Energieeigenwerte $E_1 = 1$, $E_2 = 3$ und $E_3 = 5$.

$$\begin{aligned}
\tilde{H}\psi_{ij}(x_1,x_2) &= \tilde{H}\big(\phi_i(x_1)\phi_j(x_2)\big) \\
&= -\phi_j(x_2)\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^2\phi_i(x_1) + \phi_j(x_2)x_1^2\phi_i(x_1) \\
&\quad -\phi_i(x_1)\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^2\phi_j(x_2) + \phi_i(x_1)x_2^2\phi_j(x_2) \\
&= \phi_j(x_2)\big(H\phi_i\big)(x_1) + \phi_i(x_1)\big(H\phi_j\big)(x_2) \\
&= \phi_j(x_2)E_i\phi_i(x_1) + \phi_i(x_1)E_2\phi_j(x_2) \\
&= (E_i+E_j)\psi_{ij}(x_1,x_2).
\end{aligned}$$

Die Wellenfunktionen ψ_{ij} sind tatsächlich Eigenfunktionen des Operators $\tilde{H}$, und zwar zu den Eigenwerten $\tilde{E}_{ij} = E_i + E_j$.