Lösungen für das 11. Übungsblatt

Aufgabe 1. Die allgemeine Lösung einer inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichung ist die Summe der (allgemeinen) Lösung y_H der homogenen Gleichung ($g \equiv 0$) und *irgendeiner speziellen* Lösung y_* der vollen inhomogenen Gleichung.

(1) charakteristisches Polynom $P(\lambda) = \lambda - 3$ hat Nullstelle $\lambda = 3$, also $y_H(x) = c_1 e^{3x}$; falls $g(x) = x$, Ansatz $y_*(x) = \alpha x + \beta$ ergibt $y_*(x) = -x/3 - 1/9$; falls $g(x) = xe^x$ Ansatz $y_*(x) = (\alpha x + \beta)e^x$ ergibt $y_*(x) = (-x/2 - 1/4)e^x$; falls $g(x) = xe^{3x}$ Ansatz $y_*(x) = (\alpha x^2 + \beta x)e^{3x}$ ergibt $y_*(x) = 1/2xe^{3x}$

(2) charakteristisches Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$ hat Nullstellen $\lambda = 1$ und $\lambda = -3$, also $y_H(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$; falls $g(x) = \sin x$ Ansatz $y_*(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$ führt zu $y_*(x) = -1/10 \cos x - 1/5 \sin x$; falls $g(x) = e^x$ Ansatz $y_*(x) = \alpha x e^x$ führt zu $y_*(x) = 1/4xe^x$

(3) charakteristisches Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ hat die doppelte Nullstelle $\lambda = 1$, also $y_H(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$; falls $y_*(x) = e^x$, Ansatz $y_*(x) = \alpha x^2 e^x$ gibt $y_*(x) = 1/2x^2 e^x$; falls $y_*(x) = xe^x$, Ansatz $y_*(x) = (\alpha x^3 + \beta x^2)e^x$ gibt $y_*(x) = 1/6x^3 e^x$; falls $g(x) = x^2 e^x$, Ansatz $y_*(x) = (\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2)e^x$ gibt $y_*(x) = 1/6x^3 e^x$

(4) charakteristisches Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$ hat komplex konjugierte Nullstellen $\lambda = \pm 2i$, also $y_H(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$; falls $g(x) = \cos x$, Ansatz $y_*(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$ verschafft $y_*(x) = 1/3 \cos x$; falls $g(x) = \cos 2x$, Ansatz $y_*(x) = \alpha x \cos 2x + \beta x \sin 2x$ verschafft $y_*(x) = 2x \sin 2x$

(5) charakteristisches Polynom $P(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 - 4$ ist biquadratisch, führe $\Lambda = \lambda^2$ ein, dann hat $\tilde{P}(\Lambda) = \Lambda^2 + 3\Lambda - 4$ Nullstellen $\Lambda = 1$ und $\Lambda = -4$, und $P(\lambda)$ hat Nullstellen $\lambda = \pm 1$ und $\lambda = \pm 2i$, also $y_H(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$

Aufgabe 2. Die Rotationen rot v der Vektorfelder berechnen sich zu

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind die Felder (i) und (iii) konservativ, (ii) nicht. Potentiale $\phi(x)$ kann man z.B. so bestimmen:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_1} v(\xi_1, 0, 0) d\xi_1 + \int_0^{x_2} v(x_1, \xi_2, 0) d\xi_2 + \int_0^{x_3} v(x_1, x_2, \xi_3) d\xi_3.$$

Man erhält $\phi(x) = x_1^2 + 3/2x_2^2 + 2x_3^2$ für (i) und $\phi(x) = \sin x_1 \cos x_2 e^{x_3}$ für (iii).

Da für (i) ein Potential existiert, ergeben sich die Kurvenintegrale als Potentialdifferenz zwischen Start- und Endpunkt des Weges, also

a) $\phi(1,1,1) - \phi(0,0,0) = 9/2$,
b) $\phi(e, e^2, e^{-3}) - \phi(1,1,1) = e^2 + 3/2e^4 + 2e^{-6} - 9/2$,
c) $\phi(1,0,1) - \phi(1,0,0) = 2$.

Bei (ii) müssen die Integrale tatsächlich ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned}
\int_{Weg\ a)} v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 5t^3 \\ 4t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 3t^2 + 10t^4 + 12t^3 dt = 6. \\
\int_{Weg\ b)} v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 5e^{-3t} \\ 4e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^{2t} \\ -3e^{-3t} \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 3e^{3t} + 10e^{-t} - 12e^{-2t} dt = 3e^3 + 10e^{-1} - 12e^{-2} - 1 \\
\int_{Weg\ c)} v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 3\sin 2\pi t \\ 5t \\ 4\cos 2\pi t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\pi \sin 2\pi t \\ 2\pi \cos 2\pi t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 -6\pi \sin^2 2\pi t + 10\pi t \cos 2\pi t + 4\cos 2\pi t \ dt = -3\pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_2^3 dz\ e^{x+y+z} &= \left(\int_0^1 e^x dx\right)\left(\int_1^2 e^y dy\right)\left(\int_2^3 e^z dz\right) \\
&= (e-1)(e^2-e)(e^3-e^2) = e^6 - 3e^5 + 3e^4 - e^3, \\
\int_0^1 dx \int_0^\pi dy\ x\cos(xy) &= \int_0^1 x\left(\int_0^\pi \cos(xy) dy\right) dx \\
&= \int_0^1 x\frac{\sin \pi x - 0}{x} dx \\
&= \int_0^1 \sin \pi x\ dx = 2/\pi, \\
\int_0^1 dx \int_0^1 dy\ \sqrt{x+y} &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \sqrt{x+y} dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{2}{3}\left((1+x)^{3/2} - x^{3/2}\right) dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 (1+x)^{3/2} dx\ -\ \frac{2}{3}\int_0^1 x^{3/2} dx = \frac{4\sqrt{2}-8}{15} \\
\int_0^1 dx \int_0^1 dy\ y^x &= \int_0^1 \left(\int_0^1 y^x dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1-0}{x+1} dx = \ln 2.
\end{aligned}$$