Lösungen für das 6. Übungsblatt

Aufgabe 1. Bei (i) betrachtet man zunächst das eigentliche Integral

$$I = \int_0^b x\, e^{-3x^2}\, dx.$$

Um dies zu berechnen, substituiert man $t = \psi(x) = -3x^2$ und erhält

$$I = \int_0^{-3b^2} x\, e^t\, \frac{dt}{-6x} = -\frac{1}{6}\int_0^{-3b^2} e^t\, dt = -\frac{1}{6}(e^{-3b^2} - e^0).$$

Für $b \to \infty$ konvergiert e^{-3b^2} gegen Null, so daß

$$\int_0^\infty x\, e^{-3x^2}\, dx = \frac{1}{6}.$$

Analog betrachtet man bei (ii) zunächst

$$I = \int_a^4 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$$

mit $a > -1/2$. Nach Substitution $t = \psi(x) = 1 + 2x$ ist

$$I = \int_{1+2a}^9 \frac{dt/2}{\sqrt{t}} = \sqrt{9} - \sqrt{1+2a}.$$

Für $a \to -1/2$ erhält man also

$$\int_{-1/2}^4 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}} = 3.$$

Aufgabe 2. Volumen:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (\cosh x)^2\, dx \\ &= \frac{\pi}{2}\big(r - (-r)\big) + \frac{\pi}{4}\big(\sinh 2r - \sinh(-2r)\big) \\ &= \pi r + \frac{\pi}{2}\sinh 2r. \end{aligned}$$

Mantelfläche:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-r}^r \cosh x \sqrt{1 + (\sinh x)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r (\cosh x)^2\, dx \\ &= 2\pi r + \pi \sinh 2r. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Die drei Vektoren a, b, c sind genau dann linear abhängig, wenn die Determinante

$$\det(a\ b\ c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 - \alpha$$

gleich Null ist, d.h., wenn $\alpha = 2$.

Aufgabe 4. Das charakteristische Polynom von A lautet

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 2).$$

Es besitzt die einfache Nullstelle $\lambda = 1$ und die doppelte Nullstelle $\lambda = 2$; entsprechend sind 1 ein algebraisch einfacher und 2 ein algebraisch zweifacher Eigenwert von A. Eigenvektoren zu $\lambda = 1$ erhält man als Lösung des homogenen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -7 & -1 & 5 \\ -5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

z.B. $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 3)$.

Aufgabe 5. System (i) hat die eindeutige Lösung

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 2.$$

Die allgemeine Lösung zu System (ii) kann man z.B. so schreiben

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 6. Die Vektoren $v = b - a$ und $w = c - a$ sind parallel zur Ebene $\mathcal{E}$. Als Normalenvektor kann man folglich

$$n = \frac{v \times w}{\|v \times w\|} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Big/ \left\| \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wählen. Da weiterhin A in $\mathcal{E}$ liegt, ist eine Hessesche Normalform gegeben durch

$$0 = n^T(\mathbf{x} - a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \Big(\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\Big). \tag{1}$$

Die Gerade g wird beschrieben durch

$$\mathbf{x} = d + t(e - d) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Der Schnittpunkt $\bar{\mathbf{x}}$ liegt sowohl in der Ebene $\mathcal{E}$ als auch auf der Geraden g, d.h., er erfüllt sowohl Gleichung (1) als auch die Gleichung (2) für ein geeignetes $t = \bar{t} \in \mathbb{R}$. Um $\bar{t}$ und damit $\bar{\mathbf{x}}$ zu berechnen, setzt man in (1) die Darstellung von $\mathbf{x}$ laut (2) ein. Es ergibt sich $t = -1$. Damit hat der Schnittpunkt den Ortsvektor

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7. Man bezeichnet wieder mit x_i die minimale Menge (in t) an Stoff i, die für die Produktion benötigt wird. Aus dem Diagramm liest man folgendes Gleichungssystem ab:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.4x_2 + 0.4x_4 \\ x_2 &= 2.0x_5 + 0.5x_4 \\ x_3 &= 3.0x_6 \\ x_4 &= 0.7x_3 + 0.9x_6 \end{aligned}$$

Mit $x_5 = 0.5$ und $x_6 = 2.0$ berechnet man durch Einsetzen schrittweise

$$x_3 = 6.0,\ x_4 = 6.0,\ x_2 = 4.0,\ x_1 = 4.0$$

Es werden also 4.0t des Rohstoffes benötigt.