Lösungen für das 7. Übungsblatt

Aufgabe 1.

(1) f ist für alle Werte von x_1 und x_2 definiert. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt $0 < e^{-x^2} \leq 1$, also ist der Wertebereich von f eine Teilmenge des Intervalls $I = (0, 2]$. Tatsächlich wird auch jeder Wert $y \in I$ angenommen: Für $0 < y \leq 2$ sei $x_1 = x_2 = \sqrt{-\ln(y/2)}$. Dann gilt

$$f(x_1, x_2) = e^{\ln(y/2)} + e^{\ln(y/2)} = y/2 + y/2 = y.$$

Also:

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{W}_f = (0, 2].$$

(2) f ist nicht definiert, falls $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$. Der Wert $y = 0$ wird von f nie angenommen: Das Produkt zweier Zahlen kann nämlich nur Null sein, wenn einer der Faktoren null ist, und $x_1^{-1} \neq 0$ sowie $e^{x_2^{-1}} \neq 0$ für alle reellen Zahlen x_1, x_2 ungleich null. Ist andererseits $y \neq 0$, dann wird der Wert y angenommen, z.B. an der Stelle $(x_1, x_2) = (e/y, 1)$. Folglich:

$$\mathcal{D}_f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0\}, \quad \mathcal{W}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(3) f ist genau dann definiert, wenn der Radikant nicht-negativ ist, d.h., wenn $x_1^2 + 4x_2^2 \leq 9$. Einerseits ist eine Quadratwurzel stets nicht-negativ, andererseits nimmt der Radikant offenbar nur Werte ≤ 9 an; folglich ist der Wertebereich von f Teilmenge des Intervals $I = [0, 3]$. Wiederum rechnet man schnell nach, daß jeder Wert $y \in I$ tatsächlich angenommen wird, wenn man z.B. $(x_1, x_2) = (\sqrt{9 - y^2}, 0)$ wählt. Zusammenfassend:

$$\mathcal{D}_f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + 4x_2^2 \leq 9\}, \quad \mathcal{W}_f = [0, 3].$$

(4) Die Argumente für f unterliegen keinen Einschränkungen. Der Sinus nimmt nur Werte zwischen -1 und 1 an, so daß der Wertebereich von f Teilmenge von $I = [-1, 1]$ ist. Jedes beliebige $y \in I$ wird von f angenommen, z.B. an der Stelle $(x_1, x_2) = (\arcsin y, \pi/2)$, denn

$$f(x_1, x_2) = \sin(\arcsin y) \sin(\pi/2) = y \cdot 1 = y.$$

Das heißt:

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{W}_f = [-1, 1].$$

Aufgabe 2.

(1) Da sowohl $f_1(x_1, 0) = 0$ als auch $f_1(0, x_2) = 0$ für beliebige reelle Zahlen $x_1, x_2 \neq 0$, erhält man als Grenzwerte entlang der Achsen 0. Weiterhin:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \alpha x_1) &= \frac{\alpha x_1^2}{(1+\alpha^2)x_1^2} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \\ f_1(x_1, x_1^2) &= \frac{x_1^3}{x_1^2 + x_1^4} = \frac{x_1}{1+x_1^2} \xrightarrow{x_1 \to 0} 0. \end{aligned}$$

(2) Wegen $f_2(x_1, 0) = 0$ und $f_2(0, x_2) = \pi/2$ für beliebige $x_1, x_2 \neq 0$ erhält man entlang der Achsen die Grenzwerte 0 bzw. $\pi/2$. Weiterhin

$$\begin{aligned} f_2(x_1, \alpha x_1) &= \arctan \frac{x_1^4}{\alpha^2 x_1^2} = \arctan(x_1^2/\alpha^2) \xrightarrow{x_1 \to 0} 0 \\ f_2(x_1, x_1^2) &= \arctan(x_1^4/x_1^4) = \arctan 1 = \pi/4. \end{aligned}$$

(3) Egal wie man den Limes von $f_3(x_1, x_2)$ für $(x_1, x_2) \to (0, 0)$ bildet, es läuft immer auf den Grenzwerts $\lim_{t\to+0} \frac{\sin t}{t} = 1$ hinaus.
(4) Ebenso läuft hier alles auf den Grenzwert $\lim_{t\to+0} \frac{\cos t}{t} = +\infty$ hinaus.
(5) Auch hier ist egal, entlang welcher Kurve der Limes gebildet wird. Man erhält als Grenzwert immer 0. Das kann man z.B. wie folgt sehen: Sind $|x_1| < 1/2$ und $|x_2| < 1/2$, dann ist

$$|x_1 \ln(x_1^4 + x_2^2)| \leq |x_1||\ln x_1^4| = |x_1^4|^{1/4}|\ln x_1^4| \xrightarrow{x_1\to 0} 0,$$

denn $\lim_{t\to+0} t^p \ln t = 0$ für jeden positiven Exponenten $p > 0$, also insbesondere für $p = 1/4$.

Aufgabe 3. Die Funktionen f_1 und f_2 können am Koordinatenursprung *nicht* stetig fortgesetzt werden, denn der Limes $\lim_{(x_1,x_2)\to 0} f(x_1, x_2)$ ist nicht wohldefiniert, sondern abhängig vom Weg. Auch f_4 kann *nicht* stetig fortgesetzt werden – der Limes ist zwar eindeutig bestimmt, aber unendlich (Funktionswerte divergieren). Die Funktionen f_3 und f_5 können tatsächlich bei $(x_1, x_2) = (0, 0)$ stetig ergänzt werden. Aus den Überlegungen oben folgt, daß $f_3(0, 0) = 1$ und $f_5(0, 0) = 0$ die richtige Wahl sind.

Aufgabe 4.

(1) $\partial_1 f(x_1, x_2) = 1/(1 + x_1^2)$ und $\partial_2 f(x_1, x_2) = 1/(1 + x_2^2)$
(2) $\partial_1 f(x_1, x_2) = x_1/\sqrt{x_1^2 + x_2^4}$ und $\partial_2 f(x_1, x_2) = 2x_2^3/\sqrt{x_1^2 + x_2^4}$
(3) $\partial_1 f(x_1, x_2) = (1 + 2x_1^2 \ln x_1)/x_1 \cdot (\cos x_2) \cdot e^{x_1^2+x_2^2}$
und $\partial_2 f(x_1, x_2) = (\ln x_1) \cdot (2x_2 \cos x_2 - \sin x_2) \cdot e^{x_1^2+x_2^2}$
(4) $\partial_1 f(x_1, x_2) = x_1^{x_2-1} x_2$ und $\partial_2 f(x_1, x_2) = x_1^{x_2} \ln x_1$