Lösungen für das 5. Übungsblatt

Aufgabe 1.

(1) Das charakteristische Polynom für die erste Matrix lautet

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

und hat die Nullstellen (=Eigenwerte) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Die Eigenvektoren zum Eigenwert -1 bzw. 3 sind diejenigen Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$, die das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot v = 0 \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot v = 0$$

lösen. Also sind z.B.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren zu -1 bzw. 3.

(2) $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$, Eigenwerte sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$, zugehörige Eigenvektoren sind z.B.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(3) Das charakteristische Polynom $P(\lambda) = -\lambda^3 - 9\lambda^2 - 18\lambda$ hat kein konstantes Glied und deshalb ist $\lambda_1 = 0$ eine Nullstelle. Die beiden anderen Nullstellen sind Lösungen der quadratischen Gleichung $\lambda^2 + 9\lambda + 18 = 0$, nämlich $\lambda_2 = -3$ und $\lambda_3 = -6$. Zugehörige Eigenvektoren sind z.B.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.

$$a^T b = -5,\ b^T c = 4,\ c^H d = -2,\ d^T d = 2i,\ d^H d = 4,$$

$$ca^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ a \times b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix},\ c \times c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\det(a\,b\,c) = a^T(b \times c) = (b \times c)^T a = -9,\ c^T(a \times c) = 0.$$

Die Vektoren v_i haben die Längen

$$\|v_1\| = \sqrt{6}, \quad \|v_2\| = \sqrt{12/5}, \quad \|v_3\| = \sqrt{6},$$

und sind paarweise orthogonal, d.h.,

$$v_1^T v_2 = v_2^T v_3 = v_3^T v_1 = 0.$$

Ein weiterer orthogonaler Vektor v_4 muß die drei Gleichungen

$$v_1^T v_4 = 0, \quad v_2^T v_4 = 0, \quad v_3^T v_4 = 0$$

erfüllen, d.h., v_4 löst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3/5 & 1/5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_4 = 0.$$

Eine Lösung dieses Systems ist der Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$; er hat die Länge $\sqrt{60}$. Also kann man wählen:

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{60}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor v_4 und sein negatives $-v_4$ sind die einzigen Vektoren, die auf v_1, v_2 und v_3 senkrecht stehen und Länge eins haben.

Aufgabe 3.

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -29 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)} \ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Man erhält die Vektoren der vier Seiten durch Subtraktion der Punktkoordinaten:

$$a = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \ b = \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \ c = \overrightarrow{P_3P_4} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \ d = \overrightarrow{P_4P_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die Seitenlängen sind also

$$\begin{aligned} \overline{P_1P_2} = \|a\| &= \sqrt{18} \approx 4.2 \\ \overline{P_2P_3} = \|b\| &= \sqrt{40} \approx 6.3 \\ \overline{P_3P_4} = \|c\| &= \sqrt{17} \approx 4.1 \\ \overline{P_4P_1} = \|d\| &= \sqrt{5} \approx 2.2. \end{aligned}$$

Der Innenwinkel bei P_1 berechnet sich zu

$$\angle P_4P_1P_2 = \arccos\left(-\frac{a^T d}{\|a\|\|d\|}\right) = \arccos\frac{-3}{\sqrt{18}\sqrt{5}} \approx 108^\circ.$$

Mit entsprechenden Rechnungen kommt man zu

$$\angle P_1P_2P_3 \approx 63^\circ, \quad \angle P_2P_3P_4 \approx 58^\circ, \quad \angle P_3P_4P_1 \approx 130^\circ.$$

Aufgabe 5.

(1) Die einfachste Darstellung ist gegeben durch

$$\mathbf{x} = a + t(d-a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(2) Eine einfache Variante ist

$$\mathbf{x} = a + s(b-a) + t(c-a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

(3) Einen Normalenvektor n der Ebene $\mathcal{E}$ erhält man so:

$$n = \frac{(b-a)\times(c-a)}{\|(b-a)\times(c-a)\|} = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Hessesche Normalform von $\mathcal{E}$ (bzgl. des Punktes A) ist also

$$0 = n^T(\mathbf{x}-a) \text{ bzw. } 0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0\ 1\ 1)(\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

(4) Der Abstand von D zu $\mathcal{E}$ berechnet sich wie folgt

$$\operatorname{dist}(D,\mathcal{E}) = |n^T(d-a)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|(0\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(5) Für den Winkel ϕ zwischen der Geraden g und dem Normalenvektor n gilt

$$\cos\phi = \left|\frac{n^T(d-a)}{\|n\|\,\|d-a\|}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Der Winkel zwischen g und $\mathcal{E}$ beträgt $90° - \psi$, also

$$\angle(g,\mathcal{E}) = 90° - \arccos(1/\sqrt{2}) = 45°.$$

Aufgabe 6. Durch Gauß-Elimination bringt man A in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es verbleiben $r(A) = 2$ nichttriviale Gleichungen. Der Nullraum besteht aus Lösungen v des homogenen linearen Gleichungssystems $Av = 0$. Da die allgemeine Lösung von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = p_1\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_1, p_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

ist, erhält man

$$\mathcal{N}(A) = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Die Vektoren $\mathbf{e}_1 = (1\,0\,0\,0)^T$ und $\mathbf{e}_2 = (0\,1\,0\,0)^T$ gehören nicht zu $\mathcal{N}(A)$. Somit spannen $A\mathbf{e}_1$ und $A\mathbf{e}_2$ das Bild von A auf:

$$\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}\}.$$

Der Kern bzw. der Wertebereich von F sind identisch mit dem Nullraum bzw. dem Bild von A.