Lösungen für das 10. Übungsblatt

Aufgabe 1. Die Ausgleichsgerade wird beschrieben durch $y(x) = c_0 + c_1 x$. Die Koeffizienten c_0, c_1 sind so zu bestimmen, daß

$$\mathcal{E}(c_0, c_1) := \sum_i \big((c_0 + c_1 x_i) - f(x_i)\big)^2$$

minimal wird. Also fordert man

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial c_0}\mathcal{E}(c_0, c_1) &= 2\sum_i \big(c_0 + c_1 x_i - f(x_i)\big) \\ 0 = \frac{\partial}{\partial c_1}\mathcal{E}(c_0, c_1) &= 2\sum_i x_i \cdot \big(c_0 + c_1 x_i - f(x_i)\big). \end{aligned}$$

Für den Datensatz (i) ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= 3c_0 + 3c_1 - 8 \\ 0 &= 3c_0 + 5c_1 - 12 \end{aligned}$$

mit Lösung $c_0 = 2/3$ und $c_1 = 2$, so daß die Ausgleichsgerade durch $y(x) = 2x + 2/3$ gegeben ist. Für Datensatz (ii) erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= 5c_0 + 0c_1 - 5 \\ 0 &= 0c_0 + 10c_1 + 5 \end{aligned}$$

mit Lösung $c_0 = 1$ und $c_1 = -1/2$.

Der Ansatz für eine Ausgleichsparabel ist $y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, und entsprechend soll

$$\mathcal{E}(c_0, c_1, c_2) := \sum_i \big((c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2) - f(x_i)\big)^2$$

minimiert werden. Es entstehen drei lineare Gleichungen,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial c_0}\mathcal{E}(c_0, c_1, c_2) &= 2\sum_i \big(c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 - f(x_i)\big) \\ 0 = \frac{\partial}{\partial c_1}\mathcal{E}(c_0, c_1, c_2) &= 2\sum_i x_i \cdot \big(c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 - f(x_i)\big) \\ 0 = \frac{\partial}{\partial c_2}\mathcal{E}(c_0, c_1, c_2) &= 2\sum_i x_i^2 \cdot \big(c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 - f(x_i)\big). \end{aligned}$$

Für Datensatz (i) hat man

$$\begin{aligned} 0 &= 3c_0 + 3c_1 + 5c_2 - 8 \\ 0 &= 3c_0 + 5c_1 + 9c_2 - 12 \\ 0 &= 5c_0 + 9c_1 + 17c_2 - 22. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Systems ist $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ und $c_2 = 1$, die Ausgleichsparabel ist gegeben durch $y(x) = x^2 + 1$. Für Datensatz (ii) lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= 5c_0 + 0c_1 + 10c_2 - 5 \\ 0 &= 0c_0 + 10c_1 + 0c_2 + 5 \\ 0 &= 10c_0 + 0c_1 + 34c_2 - 3 \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich $c_0 = 2$, $c_1 = -1/2$ und $c_2 = -1/2$.

Aufgabe 2. (i) Falls $x_0 = 0$, dann ist die Lösung gegeben durch $x(t) = 0$ und existiert für alle $t \in (-\infty, +\infty)$. Sei im weiteren $x_0 \neq 0$. Nach Trennung der Variablen ergibt sich

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{1/x_0 - t}.$$

Ist $x_0 > 0$, dann existiert die Lösung auf $(-\infty, 1/x_0)$. Ist $x_0 < 0$, dann existiert sie auf $(1/x_0, +\infty)$.

(ii) Mehrfache Lösungen sind möglich, da $\sqrt{x}$ bei $x = 0$ keine Lipschitz-stetige Funktion ist. Formal erhält man durch Trennung der Variablen die Lösung $x(t) = t^2$. Andererseits ist offenbar auch $x(t) \equiv 0$ Lösung. Eine dritte Lösung gewinnt man durch Kombination dieser beiden, z.B.

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ t^2 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3.

(1) Löse zunächst das homogenene Problem $\dot{y} = 3y$. Trennung der Variablen ergibt $y(t) = ce^{3t}$. Variation der Konstanten $x(t) = c(t)e^{3t}$ führt auf $\dot{c} = e^{-3t}(2t+1)$ und schließlich auf

$$x(t) = c(t)e^{3t} = \frac{-6t - 5 + 5e^{3t}}{9} + c(0)e^{3t}.$$

Aus der Anfangsbedingung $x(0) = -1$ ermittelt man $c(0) = -1$, so daß

$$x(t) = -\frac{6t + 5 + 4e^{3t}}{9}.$$

(2) Nach Trennung der Variablen erhält man

$$\frac{1}{3}\Big(\big(x(t)+1\big)^3 - 1\Big) = \frac{1}{4}t^4,$$

und damit

$$x(t) = \left(\frac{3}{4}t^4 + 1\right)^{1/3} - 1.$$

(3) Trennung der Variablen führt auf $\arctan x(t) - \arctan 1 = t^2$, und so

$$x(t) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + t^2\right).$$

(4) Das homogene Problem $\dot{y} = -2ty$ hat die allgemeine Lösung $y(t) = ce^{-t^2}$. Variation der Konstanten $c = c(t)$ führt auf $\dot{c} = 1$, so daß

$$x(t) = \big(t + c(0)\big)e^{-t^2}.$$

Die Bedingung $x(0) = 2$ liefert $c(0) = 2$.

(5) Die Lösung des homogenen Systems $\dot{y} = y$ lautet $y(t) = ce^t$. Durch Variation der Konstanten erhält man $\dot{c} = e^{-t}\cos t$. Eine Stammfunktion des Ausdrucks auf der rechten Seite findet man nach zweimalige partielle Integration: $c(t) = c(0) + e^{-t}(\sin t - \cos t)/2$. Die Anfangsbedingung erzwingt $c(0) = 9/2$, so daß sich insgesamt ergibt:

$$x(t) = (9e^t + \sin t - \cos t)/2.$$

Aufgabe 4. Die Euler-Lagrange-Gleichung gibt exakt die Newtonsche Gleichung wieder:

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) - (-V'(x)) = m\ddot{x} + V'(x).$$

Bei den Hamiltonschen Gleichungen erhält man zunächst:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -V'(q).$$

Die erste Gleichheit gilt nach Definition von $q = x$ und $p = m\dot{x}$, die zweite, weil einerseits $\dot{p} = m\ddot{x}$ (laut Definition von p) gilt, und andererseits die Newtonsche Gleichung $m\ddot{x} = -V'(x)$ erfüllt ist. Die Konstanz von H folgt aus

$$\frac{d}{dt}H(p,q) = \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}\,\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\,\frac{\partial H}{\partial p} = 0.$$

Nun sei $q(t)$ impizit durch das Wirkungsfunktional gegeben:

$$t = \frac{\partial S}{\partial E}(E, q(t)) = \int_0^{q(t)} \frac{m\,d\tilde{q}}{\sqrt{2m\big(E - V(\tilde{q})\big)}}$$

Differenziert man beide Seiten dieser Gleichung nach t, so ergibt sich

$$1 = \frac{m\dot{q}(t)}{\sqrt{2m\big(E - V(q(t))\big)}} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}(t) = \frac{1}{m}\sqrt{2m\big(E - V(q(t))\big)}.$$

Andererseits ist

$$p(t) = \frac{\partial S}{\partial q}(E, q(t)) = \sqrt{2m\big(E - V(q(t))\big)},$$

was die erste Hamiltonsche Gleichung $\dot{q} = p/m$ bestätigt. Differenziert man die Gleichung für $p(t)$ nach t, so gelangt man zur zweiten Hamiltonschen Gleichung $\dot{p} = -V'(q)$,

$$\dot{p}(t) = -\frac{m\,V'(q(t))\dot{q}(t)}{\sqrt{2m\big(E - V(q(t))\big)}} = -\frac{m\dot{q}(t)}{p(t)}V'(q(t)).$$

Wendet man den Schrödinger-Operator H auf $\psi_E(x) = \cos(S(E,x)/\hbar)$ an, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
H\psi_E(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}(E,x)\right)^2 \cos(S(E,x)/\hbar) - \frac{1}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(E,x)\sin(S(E,x)/\hbar)\right) \\
&\quad + V(x)\cos(S(E,x)/\hbar) \\
&= \left\{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}(E,x)\right)^2 + V(x)\right\}\psi_E(x) + \frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(E,x)\sin(S(E,x)/\hbar) \\
&= E\psi_E(x) + \hbar \cdot \text{irgendetwas}.
\end{aligned}$$

Die Newtonsche Gleichung für den harmonischen Oszillator lautet

$$m\ddot{x} = -2k^2 x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{2k^2}{m}}.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

mit reellen Konstanten A und B. Entsprechend ergeben sich

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \\
q(t) &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\
p(t) &= -Am\omega\sin(\omega t) + Bm\omega\cos(\omega t) \\
S(E,q) &= \int_0^q \sqrt{2m(E-k^2\tilde{q}^2)}\,d\tilde{q} = \frac{q}{2}\sqrt{2m(E-k^2q^2)} + \sqrt{\frac{mE^2}{2k^2}}\arcsin\frac{kq}{\sqrt{E}}.
\end{aligned}$$