Lösungen für das 3. Übungsblatt

Aufgabe 1. Die Ausdrücke A^3, BA und Ax^T sind nicht definiert.

$$AB^T = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}, \quad xx^T = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^T Bx = \begin{pmatrix} -22 \\ -58 \\ -16 \\ -66 \end{pmatrix}$$

sowie $x^T x = 14$ und $(Bx)^T = (-2 \ \ -8)$.

$$PQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2p-3 & 8 \end{pmatrix}, \quad QP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ p+12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Es ist also $PQ = QP$ gdw. $2p - 3 = p + 12$, d.h. $p = 15$.

Aufgabe 2. Man kann sich schnell überlegen, daß

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } N^3 = N^4 = \ldots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $M = \mathbf{1}_3 + \lambda N$. Wenn man

$$M^n = \underbrace{(\mathbf{1}_3 + \lambda N) \cdot \ \cdots \ \cdot (\mathbf{1}_3 + \lambda N)}_{n\times}$$

ausmultipliziert, erhält man – wie bei der binomischen Formel –

$$M^n = \mathbf{1}_3 + n\lambda N + \frac{n(n+1)}{2}\lambda^2 N^2 + (\text{Terme mit } N^3,\ N^4 \text{ usw.})$$

Also ist

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n\lambda & \frac{n(n+1)}{2}\lambda^2 \\ 0 & 1 & n\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Mit der angegebenen Skalarmultiplikation wird $\mathbb{R}^2$ *nicht* zu einem Vektorraum. In jedem Vektorraum V muß nämlich die Rechenregel

$$(\lambda + \mu)\, v = \lambda\, v \ + \ \mu\, v$$

für beliebige Vektoren $v \in V$ und reellen Zahlen λ, μ gelten. Wählt man hier jedoch $v = (1, 0)^T$ und $\lambda = 1$, $\mu = 2$, dann ergibt sich

$$(\lambda + \mu)\, v \ = \ \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \lambda\, v \ + \mu\, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ + \ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im Widerspruch zu obiger Regel.

C^0_* ist ein Vektorraum. Die stetigen Funktionen f mit $f(0.17) = 0$ bilden eine Untermenge im Vektorraum C^0 *aller* stetigen Funktion. Diese Menge ist offensichtlich abgeschlossen bezüglich Addition und skalarer Multiplikation, denn sind $f_1,\ f_2 \in C^0_*$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig, dann gilt

$$(\lambda\, f_1 + f_2)(0.17) = \lambda\, f_1(0.17) + f_2(0.17) = 0,$$

also liegt $\lambda f_1 + f_2$ wieder in C^0_*.

Wählt man hingegen C^0_* so, daß $f(0) = 0.17$ für alle $f \in C^0_*$, dann ist die skalare Multiplikation keine abgeschlossene Operation mehr. Z.B. gilt $(2\, f)(0) = 0.34 \neq 0.17$, so daß $2\, f$ *nicht* mehr in C^0_* liegt.

Aufgabe 4. Für

$$\text{(i) } p = 1, \quad \text{(ii) } p = 0, \quad \text{(iii) } p \in \mathbb{R} \text{ beliebig}, \quad \text{(iv)\&(v) } p = 0$$

sind die Abbildungen linear. Die Kerne der Abbildungen für (ii) und (iii) – sofern $p \neq 0$ – sind trivial. Die restlichen Kerne sind jeweils eindimensional und werden aufgespannt von den Vektoren

$$\text{(i) } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{(iv) } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{(v) } \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bis auf (ii) sind die entsprechenden Abbildungen surjektiv. Der eindimensionale Wertebereich von F in (ii) wird aufgespannt von $\binom{1}{0}$. Man erhält die folgenden Matrizen:

$$\text{(i) } (1\ 1), \quad \text{(ii) } \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii) } \begin{pmatrix} 0 & -13 \\ p & 0 \end{pmatrix} \text{(iv) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(v) } (1\ -7).$$