Lösungen für das 2. Übungsblatt

Aufgabe 1. Rotiert man den Graphen einer positiven Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ um die x-Achse, entsteht ein Rotationskörper K_f. Volumen und Oberfläche von K_f berechnen sich so:

$$\begin{aligned} V(K_f) &= \pi \int_a^b (f(x))^2 dx, \\ A(K_f) &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \end{aligned}$$

(1) K_f ist ein Rotationsellipsoid mit $a > b > 0$. Sein Volumen beträgt

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^{a} b^2 (1 - \frac{x^2}{a^2}) dx \\ &= \pi b^2 \Big(\int_{-a}^{a} dx \; - \; \frac{1}{a^2} \int_{-a}^{a} x^2 dx \Big) \\ &= \pi b^2 \Big(2a \; - \; \frac{1}{3a^2}(a^3 - (-a)^3) \; = \; \frac{4\pi}{3} ab^2. \end{aligned}$$

Setzt man zur Vereinfachung $c = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, dann ergibt sich

$$1 + \big(f'(x)\big)^2 = \frac{1 - c^2 \frac{x^2}{a^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Damit berechnet sich die Oberfläche von K_f wie folgt

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sqrt{\frac{1 - c^2 \frac{x^2}{a^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \, dx \\ &= 2\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - (\frac{cx}{a})^2} dx \\ &\overset{x = \frac{a}{c} \sin t}{=} 2\pi b \int_{-\arcsin c}^{\arcsin c} \frac{a}{c} \cos^2 t \, dt \\ &= 2\pi \frac{ab}{c} \big(\arcsin c + \frac{bc}{a} \big). \end{aligned}$$

(2) Ein Rotationsellipsoid mit $a = b = r > 0$ ist eine Kugel mit Radius r. Also $V = 4\pi/3 \, r^3$ und $A = 4\pi r^2$.

(3) Der Querschnitt des Kolbens besteht aus einer Kreislinie und anschließendem Geradenstück. Er wird beschrieben durch

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{5^2 - x^2} & \text{für } -5 \le x \le 4 \\ 3 & \text{für } 4 \le x \le 7. \end{cases}$$

Also

$$V = \pi \int_{-5}^{4} (5^2 - x^2) dx \; + \; \pi \int_4^7 3^2 dx = 9\pi \cdot 25 \; - \; \pi \frac{x^3}{3} \Big|_{-5}^{4} \; + \; 3\pi \cdot 9 = 189\pi.$$

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-5}^{4} \sqrt{5^2 - x^2} \sqrt{\frac{5^2}{5^2 - x^2}} \, dx \; + \; 2\pi \int_4^7 3 \cdot 1 \, dx \\ &= 10\pi \int_{-5}^{4} dx \; + \; 6\pi \int_4^7 dx \; = \; 108\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Erste Zeile: Die Funktion $f(x) = x^{-p}$, wobei $p > 0$, ist

- integrabel bei $x = 0$ genau dann wenn $p < 1$
- integrabel bei $x = \infty$ genau dann wenn $p > 1$

Also sind (i) und (iv) konvergent, (ii) und (iii) divergent. Da sowohl

$$\frac{1}{\sqrt{x} + x^2} < \frac{1}{x^2} \text{ als auch } \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} < \frac{1}{\sqrt{x}},$$

sind auch (v) und (vi) konvergent (Majoranten-Kriterium).

Zweite Zeile:

$$\begin{aligned}
\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan b \xrightarrow{b\to\infty} \pi/2 \\
\int_0^b \frac{dx}{1-x} &= -\ln(1-b) \xrightarrow{b\to 1} +\infty \\
\int_a^0 xe^x dx &= e^a(a-1) - 1 \xrightarrow{a\to-\infty} -1 \\
\int_a^1 \ln x \, dx &= -1 + a(1 - \ln a) \xrightarrow{a\to 0} -1 \\
\int_a^1 \frac{\ln x}{x} &= -\frac{1}{2}(\ln a)^2 \xrightarrow{a\to 0} -\infty.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Konvergenz: Man benutzt das Marjorantenkriterium.

(1) Wegen $-1 \le \cos x \le 1$ ist $|f(x)\cos x| \le f(x)$.
(2) Wegen $|\sin y| \le y$ für alle $y \ge 0$ ist $\big|\sin\big(f(x)\big)\big| \le f(x)$.
(3) Da f auf $[0, \infty)$ stetig ist und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, ist f beschränkt. Daher gibt es eine Zahl $M > 0$, so daß $f(x) \le M$. Also ist $\big(f(x)\big)^2 \le Mf(x)$.

Divergenz: (ii) divergiert immer, denn wegen $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ist $\lim_{x\to\infty} \cos\big(f(x)\big) = 1$. Vorschlag für (i)&(iii): $f(x) = x^{-2}$ ist integrabel bei $x = \infty$, hingegen sind $xf(x) = x^{1-2} = x^{-1}$ und $\sqrt{f(x)} = x^{-1}$ nicht integrabel.

Aufgabe 4.

(1) Die Vektoren sind linear abhängig. Man kann z.B. den dritten als Linearkombination der ersten beiden schreiben:

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(2) Die Vektoren sind linear unabhängig.