Lösungen für das 9. Übungsblatt

Aufgabe 1. Man erhält für die partiellen Ableitungen der Ordnungen ≤ 3:

$$\begin{aligned}
&\partial_1 f = e^{3x_2}, \quad \partial_2 f = 3x_1 e^{3x_2}, \\
&\partial_1\partial_1 f = 0, \quad \partial_1\partial_2 f = 3e^{3x_2}, \quad \partial_2\partial_2 f = 9x_1 e^{3x_2}, \\
&\partial_1\partial_1\partial_1 f = 0, \quad \partial_1\partial_1\partial_2 f = 0, \quad \partial_1\partial_2\partial_2 f = 9e^{3x_2}, \quad \partial_2\partial_2\partial_2 f = 27x_1 e^{3x_2}.
\end{aligned}$$

Die Taylor-Entwicklung bis zur dritten Ordnung ergibt folglich

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2) &= f(0,0) \\
&\quad + x_1\partial_1 f(0,0) + x_2\partial_2 f(0,0) \\
&\quad + \frac{x_1^2}{2}\partial_1\partial_1 f(0,0) + x_1x_2\partial_1\partial_2 f(0,0) + \frac{x_2^2}{2}\partial_2\partial_2 f(0,0) \\
&\quad + \frac{x_1^3}{6}\partial_1\partial_1\partial_1 f(0,0) + \frac{x_1^2x_2}{2}\partial_1\partial_1\partial_2 f(0,0) + \frac{x_1x_2^2}{2}\partial_1\partial_2\partial_2 f(0,0) + \frac{x_2^3}{6}\partial_2\partial_2\partial_2 f(0,0) \\
&\quad + R_4(x_1,x_2) \\
&= x_1 + 3x_1x_2 + \frac{9}{2}x_1x_2^2 + R_4(x_1,x_2).
\end{aligned}$$

Als konstante, lineare, quadratische und kubische Approximation für f ergeben sich somit

$$A_0(x_1,x_2) = 0, \quad A_1(x_1,x_2) = x_1, \quad A_2(x_1,x_2) = x_1 + 3x_1x_2,$$
$$A_3(x_1,x_2) = x_1 + 3x_1x_2 + \frac{9}{2}x_1x_2^2.$$

Aufgabe 2.

$$\begin{aligned}
\text{(i) } D(\Phi\circ f)(x) &= D\Phi(\xi_1,\xi_2)\Big|_{(\xi_1,\xi_2)=f(x)} \cdot Df(x) \\
&= (\,2\xi_1 \;\; 2\xi_2\,)\Big|_{(\xi_1,\xi_2)=(\sin x,\cos x)} \cdot \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} \\
&= 2\sin x\cos x + 2\cos x(-\sin x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii) } D(\Phi\circ f)(x_1,x_2) &= D\Phi(\xi_1,\xi_2)\Big|_{(\xi_1,\xi_2)=f(x)} \cdot Df(x) \\
&= (\,\frac{\xi_2}{\xi_1}\xi_1^{\xi_2} \;\; \ln\xi_1\;\xi_1^{\xi_2}\,)\Big|_{(\xi_1,\xi_2)=(e^{x_2},\ln x_1)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & e^{x_2} \\ 1/x_1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_2x_1^{x_2}\cdot\frac{1}{x_1} \\ \frac{\ln x_1}{e^{x_2}}x_1^{x_2}\cdot e^{x_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_2x_1^{x_2-1} \\ \ln x_1 x_1^{x_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Die Funktion $f(x_1,x_2)$ hat bei (x_1,x_2) einen kritischen Punkt, falls

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_1,x_2) \\ \partial_2 f(x_1,x_2) \end{pmatrix}$$

null ist. Ob ein Maximum/Minimum vorliegt, entscheidet man anhand der Hessematrix

$$D^2 f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(x_1,x_2) & \partial_1\partial_2 f(x_1,x_2) \\ \partial_2\partial_1 f(x_1,x_2) & \partial_2\partial_2 f(x_1,x_2) \end{pmatrix}.$$

Ist die Determinante der Hessematrix größer null, liegt ein lokales Extremum vor, ist sie kleiner als null, handelt es sich um einen Sattelpunkt. Liegt ein Extremum vor, dann ist es ein Minimum falls die Spur der Hessematrix größer als null ist, andernfalls ein Maximum.

(1) Der Gradient $\nabla f(x_1, x_2) = \binom{2x_1+x_2+1}{2x_2+x_1+1}$ ist null genau dann, wenn $x_1 = x_2 = -1/3$. Die Hessematrix $D^2 f(-1/3, -1/3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ hat Determinante 3 und Spur 4. Damit liegt bei $(x_1, x_2) = (-1/3, -1/3)$ ein lokales Minimum vor, mit Wert $f(-1/3, -1/3) = 2/3$.

(2) $\nabla f(x_1, x_2) = \binom{2x_1}{4x_2^3-4x_2} = 0$ genau dann, wenn $x_1 = 0$ und entweder $x_2 = 0$, $x_2 = 1$ oder $x_2 = -1$. Im ersten Fall erhält man als Hessematrix $D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ mit Determinante -8 (also Sattelpunkt). Für $x_2 = \pm 1$ ist die Hessematrix $D^2 f(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ mit Determinante 16 und Spur 10. Folglich hat f zwei lokale Minima, nämlich bei $(0, 1)$ und $(0, -1)$, jeweils mit Wert -1.

Aufgabe 4. Es ist $\partial_x W(x, t) = (2ax - 3x^2)t^2 e^{-t} = 0$ und $\partial_t W(x, t) = x^2(a - x)(2t - t^2)e^{-t} = 0$ genau dann, wenn $x = 2a/3$ und $t = 2$. (Man interessiert sich nur für Zeiten $t > 0$ und Dosierungen $x > 0$.) Als Hessematrix erhält man

$$D^2 W(2a/3, 2) = \begin{pmatrix} \partial_x \partial x W & \partial_x \partial_t W \\ \partial_t \partial_x W & \partial_t \partial_t W \end{pmatrix} (2a/3, 2) = \begin{pmatrix} -2a & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sie hat Determinante $4a > 0$ und Spur $-2a - 2 < 0$. Damit liegt zum Zeitpunkt $t = 2$ bei der Dosierung $x = 2a/3$ die maximale Wirkung des Medikaments vor.

Aufgabe 5. Bezeichnet man mit a und b die halben Kantenlängen des einbeschriebenen Vierecks, dann ist die Zielfunktion (der Flächeninhalt) gegeben durch $A = (2a)(2b) = 4ab$. Die Zwangsbedingung, daß die Eckpunkte des Vierecks auf der Ellipse liegen, läßt sich in der Form $\phi(a, b) = 0$ schreiben, wobei $\phi(a, b) = 8 - (a^2 + 4b^2)$. Kritische Punkte von A unter der Bedingung $\phi = 0$ erfüllen

$$0 = \nabla A + \lambda \nabla \phi = \begin{pmatrix} \partial_a A \\ \partial_b A \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \partial_a \phi \\ \partial_b \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4b \\ 4a \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2a \\ 8b \end{pmatrix}.$$

An kritischen Punkten hat man also $\lambda = 2b/a = a/(2b)$, folglich $a = 2b$. Die Bedingung $\phi(2b, b) = 0$ liefert schließlich $b = 1$. Somit hat das optimale Viereck die Kantenlängen 4 und 2 sowie den Flächeninhalt 8.

Aufgabe 6. Es seien a, b und c die Kantenlängen des Pakets. Zielfunktion ist das Volumen $V = abc$. Der Zwang kann durch die Bedingung $\phi(a, b, c) = 0$ beschrieben werden, wobei $\phi(a, b, c) = \ell - (4a + 4b + 4c)$ den "überschüssigen" Strick bezeichnet. Ansatz zum Auffinden des Maximums:

$$0 = \nabla V + \lambda \nabla \phi = \begin{pmatrix} \partial_a V \\ \partial_b V \\ \partial_c V \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \partial_a \phi \\ \partial_b \phi \\ \partial_c \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es folgt unmittelbar

$$\lambda = bc/4 = ac/4 = ab/4,$$

und das bedeutet $a = b = c$. Aus der Zwangsbedingung $\phi = 0$ schließt man jetzt, daß alle Kanten des Pakets die Länge $\ell/12$ haben. Das Paket mit maximalem Volumen $V = (\ell/12)^3$ ist also würfelförmig.