Lösungen für das 4. Übungsblatt

Aufgabe 1.

(i) det $= 0$. (Man kann das ohne zu rechnen sehen, denn die Matrix ist singulär: die dritte Zeile ist die Summe der ersten beiden.)

(ii) det $= \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$.

(iii) det $= 16 + 60 + 0 - 28 - 0 - 36 = 12$.

(iv) Man entwickelt die Matrix nach der dritten Zeile. Dann ist

$$\det = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 0 + (-6) - (-24) - 0 - 0 = 24$$

Aufgabe 2. Problem (i) hat die eindeutige Lösung

$$x_1 = -\frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1.$$

Als Inverses der Koeffizientenmatrix berechnet sich

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & -5 & 10 \\ -3 & 3 & -7 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Problems für System (ii) ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = p_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_1, p_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Für die rechte Seite $(2, 3, 3)$ ist das Problem lösbar. Eine spezielle Lösung lautet

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0,$$

jede weitere Lösung ist darstellbar als Summe dieser speziellen Lösung und einer Lösung des homogenen Problems, also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_1, p_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Mit rechter Seite $(3, 3, 3)$ existiert *keine* Lösung.
Die Koeffizientenmatrix von (iii) ist nicht regulär (vgl. Aufgabe 1 (i)), man kann also keine eindeutige Lösung erwarten, obwohl die Matrix quadratisch ist. Das homogene Problem besitzt die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = p_1 \begin{pmatrix} -5/11 \\ 7/11 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_1 \in \mathbb{R} \text{ beliebig,}$$

und eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems ist

$$x_1 = 2, \quad x_2 = x_3 = 0.$$

Die allgemeine Lösung von (iii) schreibt sich – wie oben – als Linearkombination der homogenen und der speziellen Lösung. Die allgemeine Lösung für Problem (iv) ist (wiederum geschrieben als Linearkombination der allgemeinen homogenen und einer speziellen inhomogenen Lösung)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_1, p_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Aufgabe 3. Das Tripel (i) ist linear abhängig:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Quadrupel unter (ii) ist linear unabhängig.

Aufgabe 4. Bezeichnet x_i die Menge des i-ten Stoffes, dann ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.8 & -1.9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0 & 1 & -1.1 & 0 \\ 0 & -1.5 & 0 & 1 & -1.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7.5 \end{pmatrix}$$

Dieses System hat die eindeutige Lösung

$$\underline{x_1 = 30.80}, \; x_2 = 2.25, \; x_3 = 15.26, \; x_4 = 13.88, \; x_5 = 7.50$$