Lösungen für das 1. Übungsblatt

Rechenregeln.

(1) Hauptsatz: Ist F Stammfunktion von f , d.h. $F'(x) = f(x)$, dann

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

(2) Partielle Integration:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

(3) Substitution $x = \phi(t)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

(4) Substitution $t = \psi(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(x)\frac{dt}{\psi'(x)}.$$

Am Ende muß der Integrand nur in t ausgedrückt werden.

Einige elementare Integrale.

$$\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1}, \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x|, \quad \int e^x dx = e^x,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x, \quad \int \cos x dx = \sin x,$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x, \quad \int \cosh x dx = \sinh x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} dx = \arctan x,$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x), \quad \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x).$$

Aufgabe 1.

(1) Substitution $x = e^t$ führt auf $\int_{\ln a}^{\ln b} \frac{dt}{t}$. Ergebnis: $\ln \left| \frac{\ln b}{\ln a} \right|$.

(2) Substitution $t = x^x$ führt auf $\int_{a^a}^{b^b} dt$. Ergebnis: $b^b - a^a$.

(3) Substitution $t = x^2$ führt auf $\frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Ergebnis: $\frac{1}{2}(\arcsin b^2 - \arcsin a^2)$.

(4) Substitution $t = \sin x$ führt auf $\int_{\sin a}^{\sin b} \frac{dt}{t}$. Ergebnis: $\ln \left| \frac{\sin b}{\sin a} \right|$.

(5) Partielle Integration mit $f(x) = x$, $g(x) = \ln x$. Ergebnis: $\frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{b}{a} \right| \right)^2$.

- (6) Partielle Integration mit $f(x) = e^x$, $g(x) = x^4$ führt auf Integral $\int x^3 e^x dx$. Nochmalige partielle Integration mit $f(x) = e^x$, $g(x) = x^3$ führt auf Integral $\int x^2 e^x dx$ usw. Ergebnis: $(24 - 24x + 12x^2 - 4x^3 + x^4)e^x \Big|_a^b$.
- (7) Partielle Integration mit $f(x) = \sin^2 x$ (Stammfunktion s.o.) und $g(x) = x$. Ergebnis: $\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{8}(\sin^2 x - \cos^2 x)\right) \Big|_a^b$.
- (8) Partielle Integration mit $f(x) = \sinh x$, $g(x) = \sinh^2 x$ und die Relation $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ führt auf die Gleichung

$$\int_a^b \sinh^3 x dx = \sinh^2 x \cosh x \Big|_a^b - 2 \int_a^b \sinh x dx - 2 \int_a^b \sinh^3 x dx.$$

Diese kann man nach $\int \sinh^3 x$ auflösen. Ergebnis: $\frac{1}{3} \left(\sinh^2 x \cosh x - 2 \cosh x \right) \Big|_a^b$.

Aufgabe 2. Partielle Integration mit $f(x) = \cos x$ und $g(x) = \cos^3 x$ ergibt

$$\int \cos^4 x dx = \sin x \cos^3 x + 3 \int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

Mit $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ leitet man folgende Gleichung her:

$$4 \int \cos^4 x dx = \sin x \cos^3 x + 3 \int \cos^2 x dx.$$

Deshalb ist

$$\int \cos^4 x dx = \frac{3}{8}x + \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + C.$$

Ganz analog (benutze $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$) folgt

$$\int \cosh^2 x dx = \frac{3}{8}x + \frac{3}{8} \sinh x \cosh x + \frac{1}{4} \sinh x \cosh^3 x + C.$$

Im ersten Integral substituiert man $x = \sin t$:

$$\begin{aligned} \int_a^b (1-x^2)^{3/2} dx &= \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} (1-\sin^2 t)^{3/2} \cos t dt \\ &= \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \cos^4 t dt \\ &= \left(\left(\frac{5x}{8} - \frac{x^3}{4} \right) \sqrt{1-x^2} + \frac{3}{8} \arcsin x \right) \Big|_a^b. \end{aligned}$$

Im zweiten substituiert man $x = \sinh t$ und erhält

$$\int_a^b (1+x^2)^{3/2} dx = \left(\left(\frac{5x}{8} + \frac{x^3}{4} \right) \sqrt{1+x^2} + \frac{3}{8} \operatorname{arsinh} x \right) \Big|_a^b.$$

Aufgabe 3. Alle Integrale lassen sich durch die Substitution $t = f(x)$ vereinfachen. Man erhält:

- (1) $\int_{f(0)}^{f(1)} \frac{dt}{t} = \ln \left| \frac{f(1)}{f(0)} \right|$
- (2) $\int_{f(0)}^{f(1)} t^m dt = \frac{1}{m+1} (f(1)^{m+1} - f(0)^{m+1})$
- (3) $\int_{f(0)}^{f(1)} e^t dt = e^{f(1)} - e^{f(0)}$

Aufgabe 4.

(1) Die Flächenformel lautet $A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$. Also

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-a}^a b\sqrt{1 - (x/a)^2} dx - \int_{-a}^a -b\sqrt{1 - (x/a)^2} dx \\
 &= 2b \int_{-a}^a \sqrt{1 - (x/a)^2} dx \\
 &\stackrel{x=a \sin t}{=} 2b \int_{\arcsin -1}^{\arcsin 1} \sqrt{1 - \sin^2 t} a \cos t dt \\
 &= 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt \\
 &= ab(x + \sin x \cos x) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
 &= ab\pi.
 \end{aligned}$$

(2) Dieselbe Flächenformel wie oben. Also

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^1 \cos \frac{\pi}{3} x dx - \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} dx \\
 &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos t \frac{dt}{\pi/3} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx \\
 &= \frac{3}{\pi} (\sin \pi/3 - \sin(-\pi/3)) - \frac{1}{6} (1^3 - (-1)^3) \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

(3) Die Flächenformel lautet $A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r(\phi))^2 d\phi$. Also

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \phi) d\phi \\
 &= \frac{b^2}{2} \int_0^{2\pi} d\phi + \frac{a^2 - b^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \\
 &= \frac{a^2 + b^2}{2} \pi.
 \end{aligned}$$