Klausur 1

U 1

$(n+1)! > 3^n$

$n=1: 2! = 2 < 3$ -

$n=2: 3! = 6 < 9$ -

$n=3: 4! = 24 < 27$ -

$n=4: 5! = 120 > 81$ ✓ Induktionsbeginn

$n \to n+1$

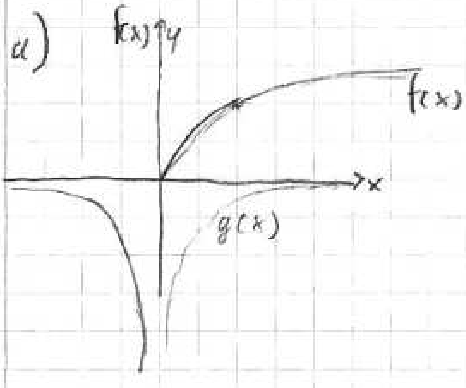
$((n+1)+1)! = (n+2)! = (n+1)!(n+2) > 3^n$

Induktionsvoraussage: $> 3^n \geq 6 > 3 = 3^{n+1}$ // ✓

U 2

$f(x) = \sqrt{x}, x > 0$ $g(x) = -1/x^2, x > 0$

a)



b)

b) $y = f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$

quadrieren:

$y^2 = x = f^{-1}(y), y \geq 0$

$y = g(x) = -\frac{1}{x^2}, x > 0 \Rightarrow y < 0$

$\underbrace{-\frac{1}{y}}_{>0} = x^2$ $\Rightarrow$ $x = \sqrt{-\frac{1}{y}}$ =

$g^{-1}(y) = \sqrt{-\frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt{-y}}$, $y < 0$

c) $(g \circ f)^{-1}(y) = (f^{-1} \circ g^{-1})(y) = f^{-1}(g^{-1}(y)) = f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{-y}}\right) = \frac{1}{-y} = -y$ //

für $y < 0$ //

d) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = -\frac{1}{x}$ für $x > 0$;

e) Wegen $g(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ kann keine Quadratwurzel gezogen werden

A3

a) $|x+4| \leq 3-x$

1. Fall $x \leq -4$

$-(x+4) \leq 3-x$

$\underbrace{-x-4 \leq 3-x}$ ✓

stimmt immer

2. Fall $x > -4$

$x+4 \leq 3-x$

$2x \leq 3-4 = -1$

$x \leq -1/2$

Insgesamt ist Ungleichung erfüllt für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq -1/2$

b) $\frac{|x-3|+3}{x-2} > 1$

$x \neq 2$

1. Fall: $x < 2$

$-x+3+3 < x-2$

$8 < 2x$

$x > 4$

2. Fall: $2 < x \leq 3$

$-x+3+3 > x-2$

$2x < 8$

$x < 4$ erfüllt

3. Fall: $x > 3$

$\cancel{x}-3+3 > \cancel{x}-2$

$0 > -2$ ✓

immer erfüllt

Erg. $x > 2$

K4

a) $z = \sqrt{-16} - i + (1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})$

$= 4i - i + 1 - i^2 3 = 3i + 4 = 4 + 3i$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

b) $z = \frac{4}{-i + \sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3} - i} \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{4\sqrt{3} + 4i}{3 + 1} = \sqrt{3} + i$

$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

K5

$\frac{|z - i|}{|z + 1|} \geq 1 \;, z \neq -1$

$\Leftrightarrow |z - i| \geq |z + i| \quad z = x + iy, \cancel{x}\; x, y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow |x + i(y-1)| \geq |(x+1) + iy|$

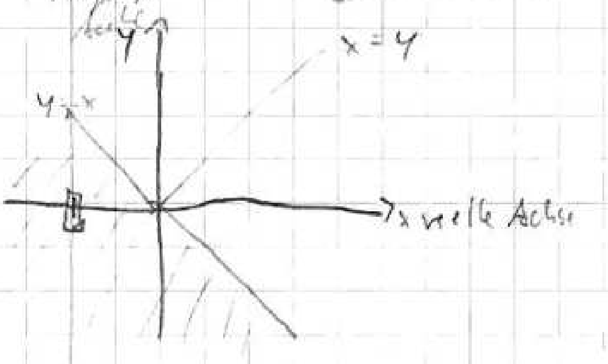
$\Leftrightarrow |x + i(y-1)|^2 \geq |(x+1) + iy|^2$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 \geq (x+1)^2 + y^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2y + \cancel{1} \geq \cancel{x^2} + 2x + \cancel{1} + \cancel{y^2}$

$\Leftrightarrow -y \geq x$ bzw.

$\underline{\underline{y \leq -x}}$



K6

a) $a_n = \frac{(10-n)^4}{1+3n^4} \underset{\uparrow}{=} \frac{\left(\frac{10}{n}-1\right)^4}{\frac{1}{n^4}+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$

Erweiterung mit $1/n^4$

b) $b_n = \frac{n^3+10}{1-3n^2} \underset{\uparrow}{=} \frac{n+10/n^2}{1/n^2-3} \xrightarrow[n\to\infty]{} -„\infty"$

Erweiterung mit $1/n^2$

c) $c_n = 2n - \sqrt{4n^2-2n} = \frac{(2n-\sqrt{4n^2-2n})(2n+\sqrt{4n^2-2n})}{2n+\sqrt{4n^2-2n}}$

$= \frac{\cancel{4n^2}-\cancel{4n^2}+2n}{2n+\sqrt{4n^2-2n}} = \frac{2n}{(2n)+\sqrt{4n^2-2n}} \cdot \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{2n}}}$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ //

K7

$a_1 = 1,\ a_{n+1} := \frac{4}{4-a_n}$ für $n \geq 1$, also

z.B. $a_2 = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3}$, $a_3 = \frac{4}{4-\frac{4}{3}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 3/2$ //

a) $a_1 = 1 < 2,\ a_{n+1} = \frac{4}{4-\underbrace{a_n}_{<2 \text{ nach Induktionsannahme}}} < \frac{4}{4-2} = 2$

b)

$a_1 = 1 < \frac{4}{3} = a_2$;

$a_{(n+1)+1} = a_{n+2} = \frac{4}{4-\underbrace{a_{n+1}}_{> a_n \text{ nach Induktions-Annahme}}} > \frac{4}{4-a_n} = a_{n+1}$

c) Eine (streng) monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist konvergent, besitzt also einen Grenzwert a:

Es folgt $\underset{\substack{\downarrow \\ a}}{a_{n+1}} = \frac{4}{4-\underset{\substack{\downarrow \\ a}}{a_n}}$, also: $a = \frac{4}{4-a}$, somit $(4-a)a = 4$

$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0$

$(a-2)^2 = 0$, $a - 2 = 0$, $a = 2$ //

Wurzel

A 8

a) $$\underset{!!!}{\sum_{n=2}^{\infty}} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \underset{n=0}{-1} \underset{n=1}{-\frac{1}{3}} \quad \cancel{q} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{konvergent}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6} \,//$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2^n} = \cancel{\sum_{n=1} \frac{1}{2^n} + \ldots}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1 - 1$$

$$= \frac{1}{1-1/2} + \frac{1}{1+1/2} - 2 = 2 + \frac{2}{3} - 2 = \frac{2}{3} \,//$$

c) Quotientenkriterium

$$\frac{\frac{((k+1)!)^3}{(3k+3)!}}{\frac{(k!)^3}{(3k)!}} = \frac{[(k+1)!]^3 \, (3k)!}{[k!]^3 \, (3k+3)!} = \frac{(k+1)^3}{(3k+1)(3k+2)(3k+1)}$$

$$\frac{(1+1/k)(1+1/k)(1+1/k)}{(3+1/k)(2+1/k)(1+1/k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{27} \quad < 1 \quad \text{konvergent}$$