

## 2.Klausur (Version B)

21. Februar 2004

Name: Lehmann  
Vorname: Christian  
Matrikelnummer: 2609434

Bastian  
Gebauer

| Aufgabe    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\Sigma$ |
|------------|---|---|---|---|---|---|----------|
| max. Pkte. | 6 | 5 | 4 | 6 | 8 | 5 | 34       |
| err. Pkte. | 0 | 5 | 4 | 4 | 8 | 5 | 26       |

Hinweise:

1. Zitate sind nur aus der Vorlesung und aus den "Übungsaufgaben zul" assig.
2. Als Hilfsmittel sind erlaubt: alle nicht belebten Sachen wie Vorlesungsmitschrift, Skript, B"ucher, "Übungsaufgaben, Taschenrechner, usw.  
Notebooks, PCs und Handys sind allerdings verboten.
3. Verwende bitte für jede Aufgabe ein separates Blatt und versehe es mit Deinem Namen, der Nummer der Aufgabe und dem Namen des Übungsgruppenleiters.
4. Bitte hefte zur Abgabe die Lösungsblätter und das Deckblatt in richtiger Reihenfolge zusammen.



Prof. Dr. C. Schneider, B. Gebauer, B. Schappel

**Aufgabe 1:** (6 Punkte)

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/3}}{3^{n-1}}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{n^2}$

(c)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$  (Hinweis: Was ergibt  $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ ?)

~~Aufgabe 2:~~ (5 Punkte)

Beweise mittels der Additionstheoreme des Sinus und des Cosinus die folgenden beiden Gleichungen:

~~$\cos(x+y) \cos(x-y) = \cos^2(x) - \sin^2(y)$~~

~~$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$~~

~~Aufgabe 3:~~ (4 Punkte)

Ein Medikament werde im Körper des Menschen mit einer Halbwertszeit von 14 Stunden exponentiell abgebaut, d.h. der Abbau des Medikamentes wird durch die Funktion

$$f(t) = M_0 e^{-\lambda t}$$

beschrieben, wobei  $M_0$  die eingenommene Medikamentenmenge sei.

Wie lange dauert es, bis sich nur noch 5% der ursprünglichen Medikamentenmenge im Körper befinden?

~~Aufgabe 4:~~ (6 Punkte)

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

~~$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin(x)}{2x - \sin(x)}$~~

~~$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3) e^{-3x}$~~

~~$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$~~

**Aufgabe 5:** (8 Punkte)

Es sei  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  gegeben durch  $f(x) = x \cdot 3^x$ .

Zeige, dass  $f$  bijektiv ist.

Es sei  $g = f^{-1}$  die Umkehrfunktion von  $f$ . Berechne  $g'(3)$ .

Berechne die ersten drei Ableitungen und vermute damit die allgemeine Formel für  $f^{(n)}$ .

Beweise die vermutete Formel per Induktion.

**Aufgabe 6:** (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{(x+1)\sqrt{x+2}}{x^2 - 2x - 3}$$

Führe eine Kurvendiskussion für  $f$  durch, d.h. bestimme

den maximalen Definitionsbereich  $D_f$  und untersuche in welchen isolierten Punkten von  $\mathbb{R} \setminus D_f$  die Funktion stetig fortsetzbar ist.

die Nullstellen und die lokalen Extrema von  $f$ .

das Verhalten von  $f$  für  $x \rightarrow \infty$ .