S. Weber : MATHEMATIK FÜR CHEMIKER I - SS 2004

---

1. Klausur : Samstag, 12. Juni , 12:30 – 15:30 Uhr , Muschel

- **Jede der 8 Aufgaben mit einem neuen Blatt und Namen beginnen !**
- **In Klammern : erreichbare Maximal-Punkte / empfohlene Maximal-Zeit !**
- **Kurze, aber vollständige Begründungen angeben !!**

(K1) **(10 Min)** Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage $A(n)$: $(n+1)! > 3^n$? **(3 Punkte)**

Lösungsweg (nicht anders !) :

Prüfe die Richtigkeit der Aussage für $n=1,2,...$ bis zu einer Stelle, die als Induktionsbeginn dienen kann, und vervollständige dann den Induktions-Beweis.

(K2) **(30 Min)** Gegeben seien: $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ und $g(x) = \frac{-1}{x^2}$ für $x>0$.

a) Skizziere die Graphen von f und von g . **(1 Punkt)**

b) Bestimme die Umkehrfunktionen:
$f^{-1}(y)$, $g^{-1}(y)$ unter expliziter Angabe der y , für welche jede Formel gilt. **(3 Punkte)**

c) Bestimme unter Verwendung von b) (nicht anders !) die Umkehrfunktion:
$(g \circ f)^{-1}(y)$ unter expliziter Angabe der y , für welche die Formel gilt. **(2 Punkte)**

d) Bestimme nach Definition die Werte $(g \circ f)(x)$
unter expliziter Angabe der x , für welche die Formel gilt. **(2 Punkte)**

e) Begründe, warum die Komposition $f \circ g$ hier nicht gebildet werden kann. **(1 Punkt)**

(K3) **(30 Min)** Für welche reellen Zahlen x gelten die folgenden Ungleichungen?

a) $|x+4| \leq 3-x$ **(3 Punkte)**

b) $\frac{|x-3|+3}{x-2} > 1$ **(5 Punkte)**

(K4) **(15 Min)** Schreibe die folgenden komplexen Zahlen z in der Form $x+iy$ mit $x,y \in \mathbb{R}$ und bestimme anschließend ihre Beträge.

a) $z = \sqrt{-16} - i + (1+i\sqrt{3}) \cdot (1-i\sqrt{3})$ **(2 Punkte)**

b) $z = \frac{4}{-i+\sqrt{3}}$ **(2 Punkte)**

---

weiter auf der Rückseite

(20 Min) Finde die komplexen Zahlen z, welche die Ungleichung $\frac{|z-i|}{|z+1|} \geq 1$ erfüllen, beschreibe die Lösungsmenge und illustriere sie in der Gauß'schen Zahlenebene. **(5 Punkte)**

(25 Min) Unten sind drei Folgen durch ihre allgemeinen Glieder gegeben.
Bestimme mittels der Rechenregeln die (reellen oder uneigentlichen) Grenzwerte.

a) $a_n = \frac{(10-n)^4}{1+3n^4}$ **(2 Punkte)**

b) $b_n = \frac{n^3+10}{1-3n^2}$ **(2 Punkte)**

c) $c_n = 2n - \sqrt{4n^2 - 2n}$ **(3 Punkte)**

(20 Min) Eine Folge reeller Zahlen a_n sei für $n \geq 1$ rekursiv gegeben durch: $a_{n+1} = \frac{4}{4-a_n}$, beginnend mit $a_1 = 1$.

a) Beweise mit Induktion: Die Folge ist nach oben durch 2 beschränkt. **(2 Punkte)**

b) Beweise nach Definition: Die Folge ist monoton steigend. **(2 Punkte)**

c) Warum existiert der Grenzwert der Folge? Berechne ihn. **(2 Punkte)**

(30 Min)

a) Berechne den Wert der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n}$. **(2 Punkte)**

b) Berechne den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2^n}$. **(3 Punkte)**

c) Untersuche die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^3}{(3k)!}$ auf Konvergenz. **(3 Punkte)**

---

*Die erreichbaren Maximal-Punkte ergeben insgesamt **50 Punkte***

*Die empfohlenen Maximal (!!)-Zeiten summieren sich zu **180 Min** ...*

Alles Gute !